

Representación de operadores en bases wavelet

Jairo Villegas G Jorge Castaño B

Universidad EAFIT

javille@eafit.edu.co

Grupo de Análisis Funcional y Aplicaciones
Seminario Doctorado Ingeniería Matemática

9 de noviembre de 2015

- 1 Preliminares
- 2 Método wavelet-Galerkin
- 3 Representación de operadores diferenciales

Preliminares

El problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \end{aligned}$$

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ solución clásica, $f \in L_2(\Omega)$.

Formulación débil:

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

\Downarrow

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Preliminares

$$u \in V = H_0^1(\Omega).$$

Formulación débil:

$$u \in V: a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V,$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u, v \in V$$

$$\ell: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

Método de Galerkin

Problema diferencial:

$$Tu = f$$

T es un operador diferencial lineal en un espacio de Hilbert V .

$\tilde{u} \approx u$ en $V_N \subset V$

$$V_N = \text{gen}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$$

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i.$$

Formulación variacional:

$$a(u, v) = \langle v, Tu \rangle$$

$$\ell(v) = \langle \ell, v \rangle$$

$$u \in V, \forall v \in V$$

$$\langle v, Tu \rangle = \langle \ell, v \rangle.$$

$$\langle \varphi_j, T\tilde{u} \rangle = \langle \varphi_j, f \rangle$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \langle \varphi_j, T\varphi_i \rangle = \langle \varphi_j, f \rangle$$

$$Kc = b.$$

Elección del espacio V_N

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$$
$$Kc = b$$

Requerimientos:

- φ_i soporte pequeño: K dispersa
- φ_i regularidad y ortogonalidad: K tiene número de condición bajo
- Esquema refinable: \tilde{u} se puede mejorar recursivamente con bajo costo computacional.

Análisis multirresolución

$\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de subespacios de $L_2(\mathbb{R})$, es un análisis multirresolución (AMR) si

- $\{0\} \subset \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L_2(\mathbb{R})$
- $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$
- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$
- $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - k) \in V_0$
- $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 , φ es la función de escala.

- φ : Función de escala:

$$V_j = \text{gen}\{\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

- ψ : wavelet madre asociada a la función de escala φ

$$W_j = \text{gen}\{\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

- Refinamiento del espacio de representación:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

Qué destacar en las wavelets

El soporte compacto y su elevada localización permiten una buena aproximación aún en regiones donde la solución tiene alto gradiente u otro tipo de singularidad.

Sus propiedades de multirresolución o multiescala permiten calcular una aproximación inicial y adaptivamente mejorarla mediante un refinamiento recursivo realizado sólo en regiones que lo requieran.

Wavelets Daubechies: Elevada localización, buena representación de singularidades, no tienen expresión funcional explícita.

Resultados de alta precisión y bajo costo computacional.

Wavelet-Galerkin sobre intervalo

$$Tu = f, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad u \in V, \quad \forall v \in V$$

$$u \in V = L_2[0, 1].$$

$$\langle v, Tu \rangle = \langle v, f \rangle.$$

- Considerar un AMR de $L_2[0, 1]$
- $\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset L_2[0, 1]$
- Fijar una escala j y calcular una solución aproximada.
- $V_j = \text{gen}\{\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Acotar el error y si es necesario pasar a la escala $j + 1$.

Ejemplo

Considere el problema de valor de frontera

$$-u'' = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}, \quad \text{en } \Omega = (0, 1)$$

$$u(0) = u'(1) = 0$$

Formulación variacional:

Encontrar $u \in V$ tal que

$$\int_0^1 u' v' dx = \int_0^1 v \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} dx, \quad \text{para cada } v \in V,$$

$V = \{v \in C[0, 1] : v' \text{ es continua a tramos y acotada en } [0, 1], v(0) = 0\}$.

Solución aproximada: $u_h(x) = 0,735x - 0,33x^2$.

Solución exacta: $u(x) = \frac{4}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$.

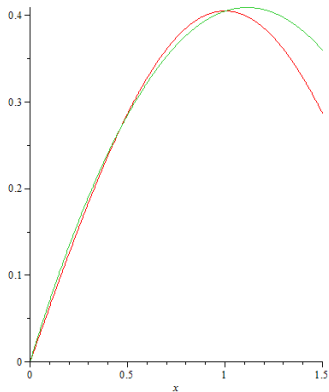


Figura: En rojo la solución exacta, en verde solución aproximada

Aproximación por semigrupos

El problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \mathcal{L}u + \mathcal{N}f(u) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

la solución se puede expresar como

$$u(x, t) = e^{t\mathcal{L}}u_0(x) + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}}\mathcal{N}f(u(x, s))ds.$$

El operador $e^{t\mathcal{L}}$ se representa por

$$e^{t\mathcal{L}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathcal{L})^n}{n!}.$$

Cuadratura

Aproximar

$$I(t) = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}} u(s) v(s) ds$$

Se busca una aproximación de la forma

$$I(t) = \hat{I}(t) + O(h^{m+1}) \quad (*)$$

$$h = t_{i+1} - t_i, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

$$\hat{I}(t) = \underbrace{(e^{mh\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}}_{\text{operador}} \left(\sum_{i,j=0}^m c_{ij} u_i v_j \right) \quad (**)$$

Los coeficientes $c_{i,j}$ se determinan comparando (*) y (**):

$$c_{01} = \frac{1}{2} - s, \quad c_{10} = \frac{1}{2} - s, \quad c_{11} = s.$$

$$\hat{I} = (e^{h\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}[su_0v_0 + (1/2 - s)u_0v_1 + (1/2 - s)u_1v_0 + su_1v_1]$$

$$\hat{I} = \frac{1}{2}(e^{h\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}(u_0v_1 + u_1v_0), \quad \text{para } s = 0$$

$$\hat{I} = \frac{1}{2}(e^{h\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}(u_0v_0 + u_1v_1), \quad \text{para } s = 1/2.$$

$$I(t) \approx \frac{1}{2}(e^{h\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}[u(x, t+h)v(x, t) + u(x, t)v(x, t+h)].$$

$$f(\partial_x) = e^{h\mathcal{L}}$$

$$f(\partial_x) = (e^{h\mathcal{L}} - \mathcal{I})\mathcal{L}^{-1}.$$

Representación operador diferencial

- Defina $\partial_J^{(n)}$,

$$\partial_J^{(n)} f(x) := P_J \frac{d^n}{dx^n} P_J$$

$P_J : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_J$ proyección ortogonal sobre V_J

- $P_J(f) = P_{J-M}(f) + \sum_{i=J-M}^{J-1} Q_i(f)$

$$\partial_J^{(n)} f(x) := \left(P_{J-M} + \sum_{i=J-M}^{J-1} Q_i \right) \frac{d^n}{dx^n} \left(P_{J-M} + \sum_{i=J-M}^{J-1} Q_i \right) f(x)$$

$Q_J : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow W_J$ proyección ortogonal sobre W_J .

$f \in L_2(\mathbb{R})$ se aproxima en V_j por $f \approx P_j(f) = \sum_k s_k^j \varphi_{j,k}$,
 $s_k^j = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_{j,k}(x) dx$.

En W_j por $Q_j(f) = \sum_k d_k^j \psi_{j,k}$, $d_k^j = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j,k}(x) dx$.

Referencias



Beylkin, G.

On the Representation of Operators in bases of Compactly supported Wavelets
SIAM J. Numer. Anal. Vol. 6, No 6, (1992), pp. 1716-1740.



Beylkin, G., Keiser, J. M.

On the Adaptive Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential Equations in Wavelet bases.
Journal of Computational Physics., 132 (1997), 233-259.



Daubechies, I.

Ten Lectures on Wavelets.
 CBMS Series 61, SIAM, Philadelphia 1992.



Hajji, M. A., Melkonian, S., and Vaillancourt, R.

Representation of Differential Operators in Wavelet Basis.
Computers & Mathematics, 47 (2004) 1011-1033.



Urban, K.

Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations.
 Oxford University Press Inc., New York, 2009.